Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Edition

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Production, durée de vie et conformité de produits (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btsedition.fr/assets/annales/bts-edition/E2 - Mathématiques/2022/BTS Edition - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. Les questions étudient cette fonction, la distance parcourue, son développement limité et la tangente à sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.

La formule fournie pour l'équation homogène $y' + ay = 0$ donne $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$. On remplace donc a par sa valeur dans la formule. Cette expression définit toutes les solutions sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.**

Question 1. b. On définit g(t) = 5 sur [0 ; +∞[. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En substituant dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vérifiée pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, g est bien une solution de (E).

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **g(t) = 5 est solution de (E).**

Question 1. c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Toute solution de cette équation s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, trouvée en 1.a : $ke^{-0,8t}$. En réunissant ces deux expressions, on obtient l'ensemble des solutions sur $[0 ; +\infty[$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.**

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale de (E) est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. La condition initiale impose $f(0) = k + 5 = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la solution recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, pour t ≥ 0.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est 5.

Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t} \to 0$, puis $15e^{-0,8t} \to 0$. Le terme constant reste égal à 5. La limite de la somme est donc égale à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en +∞ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ lorsque t tend vers +∞.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : y = 5.

Question 2. En admettant que f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Sur $[0 ; +\infty[$, l'exponentielle est positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en +∞ vaut 5. Le tableau de variation est donc :

t	0	+∞
f'(t)		−
f(t)	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur [0 ; +∞[.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$: la vitesse ne s'annule jamais à un instant fini. Elle tend vers 5 m·s^{-1} sans l'atteindre. Selon le modèle, le chariot ne s'arrête donc pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse reste supérieure à 5 m·s^{-1}.**

Question 4. a. **Pour F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Comme $(-18,75)(-0,8) = 15$, il vient $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Par conséquent, F est une primitive de f sur l'intervalle donné.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **F'(t) = f(t) : F est une primitive de f.**

Question 4. b. **La distance d parcourue entre t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la distance exacte entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis l'arrondir au centimètre.**

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde est $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Cette expression est la valeur exacte. Son évaluation donne environ 15,3251 mètres, soit 15,33 mètres au centimètre près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ **m, soit environ 15,33 m.**

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir, parmi les propositions données, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte, à recopier sans justification.**

Le logiciel indique la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + 24/5\ t^2$. Parmi les propositions, la troisième reprend ce polynôme et ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est la forme correcte du développement limité à l'ordre 2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **Troisième proposition : 20 − 12t + 4,8t² + t²ε(t), avec** $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$. D'après l'expression de la dérivée, $f'(0) = -12e^{0} = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans l'équation, on obtient la tangente demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

y = 20 − 12t.

2. Production, durée de vie et conformité de produits

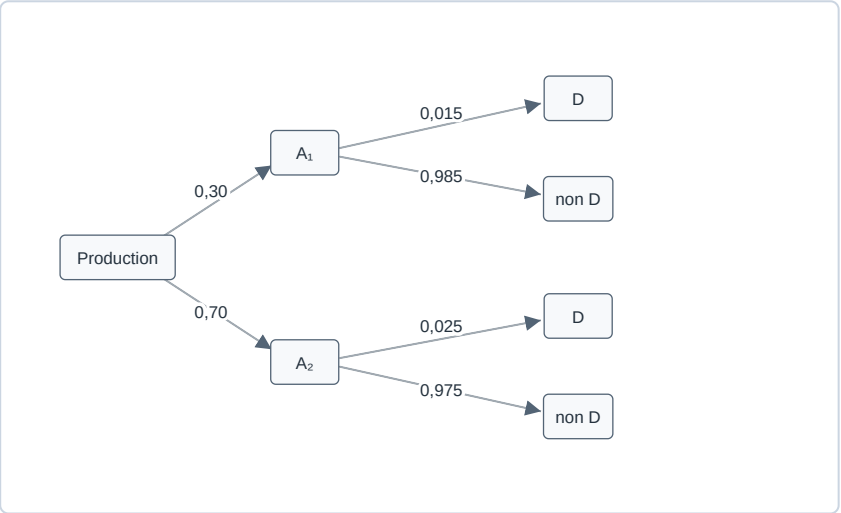
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents. L'exercice porte ensuite sur la durée de fonctionnement des tubes, modélisée par une loi exponentielle, et sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré représentant les deux ateliers, leurs parts de production et les probabilités qu'un tube présente un défaut.

Le premier niveau de l'arbre indique l'origine du tube : l'atelier 1 fournit 30 % de la production et l'atelier 2, 70 %. Depuis chaque atelier, on place le taux de défaut indiqué dans l'énoncé. La branche « non D » reçoit la probabilité complémentaire : 1 − 0,015 = 0,985 pour l'atelier 1 et 1 − 0,025 = 0,975 pour l'atelier 2. Chaque paire de branches conditionnelles totalise 1.

Arbre pondéré de production et conformité



Les probabilités des branches issues d'un atelier sont conditionnelles à cet atelier.

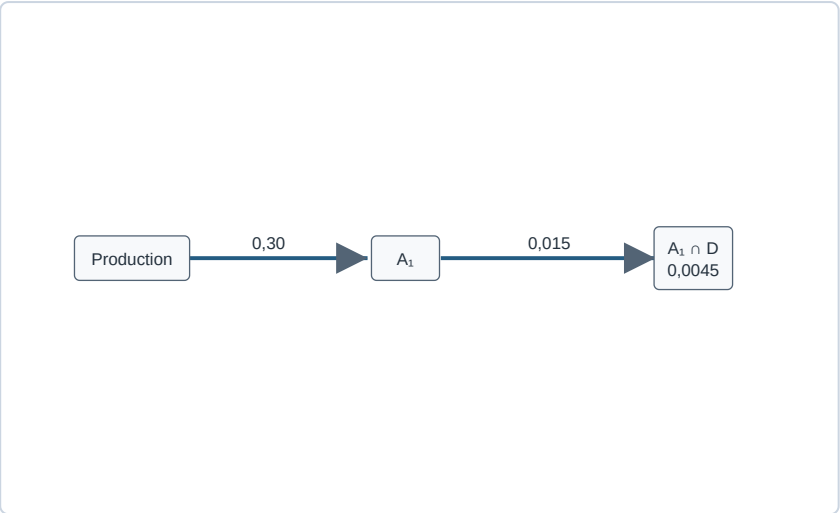
✓ RÉPONSE À RETENIR

A_1 : 0,30 ; A_2 : 0,70. Depuis A_1 : D = 0,015 et non D = 0,985. Depuis A_2 : D = 0,025 et non D = 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Pour obtenir simultanément un tube de l'atelier 1 et un tube défectueux, on multiplie la probabilité d'origine par le taux de défaut conditionnel à cet atelier. Ainsi, $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Cette probabilité conjointe correspond à 0,45 % de la production totale.

Chemin correspondant à A_1 et D



Le chemin surligné donne la probabilité conjointe par multiplication.

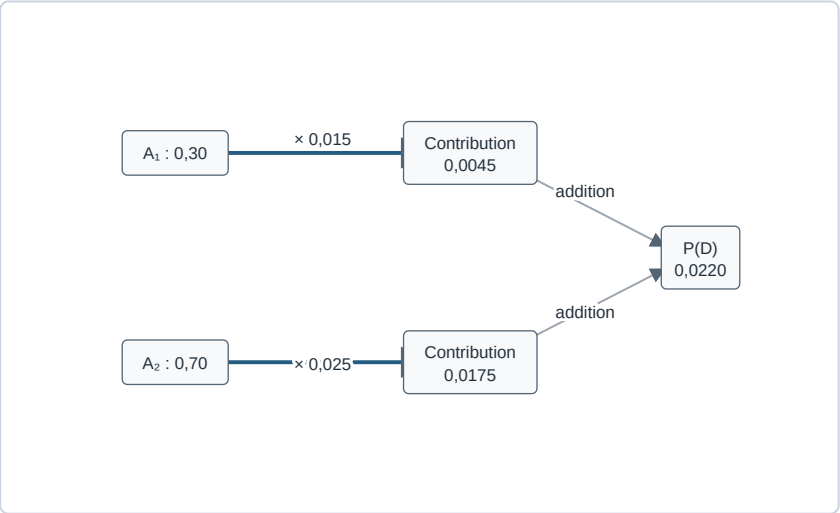
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. Montrer que la probabilité qu'un tube présente un défaut est P(D) = 0,0195 selon l'énoncé imprimé. Une annotation manuscrite sur le sujet indique 0,0220 à la place de cette valeur.

La formule des probabilités totales donne $P(D) = P(A_1)P_{A_1}(D) + P(A_2)P_{A_2}(D)$. Avec les taux et les parts de production imprimés, le calcul est $0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,0220$. La valeur 0,0195 imprimée sur la question est donc incohérente avec ces données. L'annotation manuscrite 0,0220 correspond au résultat vérifié.

Calcul de la probabilité totale de défaut



Les deux contributions au défaut s'additionnent.

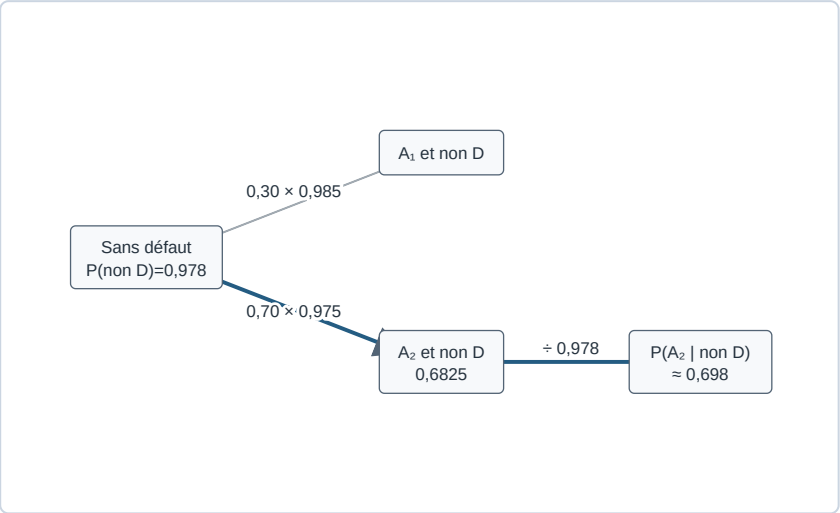
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(D) = 0,0220$, soit 2,20 %.

Question 4. Sachant que le tube ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la probabilité conditionnelle $P(A_2 \mid \overline{D})$. La probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 2 et ne présente pas de défaut est $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité totale de non-défaut vaut $1 - 0,0220 = 0,9780$. En divisant la probabilité conjointe par cette probabilité de conditionnement, on obtient $0,6825 / 0,9780$.

Parmi les tubes sans défaut, part issue de A₂



La probabilité conjointe favorable est rapportée à la probabilité de non-défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

La page originale indique le paramètre $\lambda = 0,0001$ heure^{-1}. Pour une loi exponentielle, l'espérance est $E(T) = 1/\lambda$, donc $E(T) = 1/0,0001 = 10\,000$ heures. Elle représente la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube dans le modèle. La valeur 0,001 mentionnée dans le prompt ne correspond pas au paramètre imprimé sur le sujet.

Espérance de la durée de fonctionnement

Paramètre	Formule	Espérance
λ = 0,0001	E(T) = 1/λ	10 000 heures

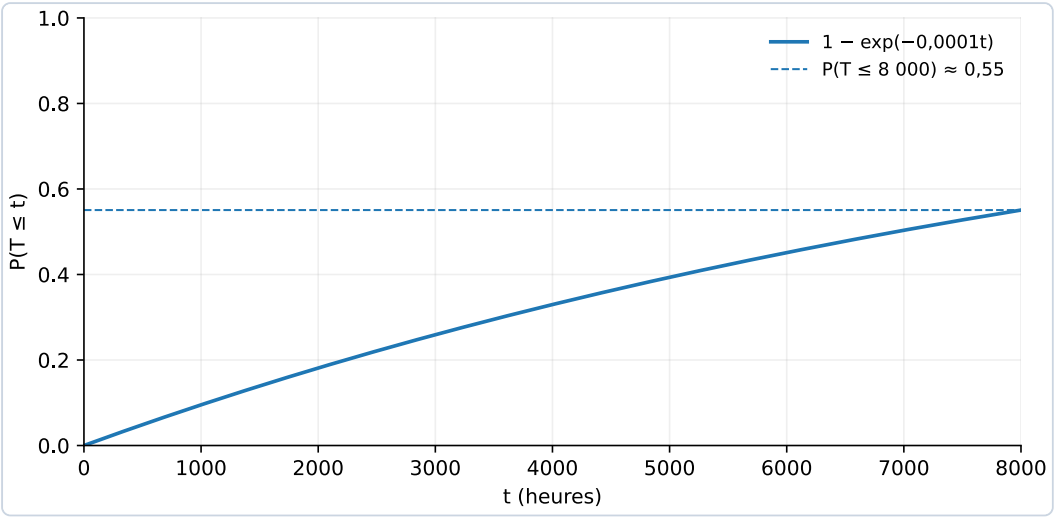
L'espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(T) = 10\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La page originale donne $\lambda = 0,0001$ et rappelle $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La loi étant continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Ainsi, $1 - e^{-0,0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0,8} \approx 0,5507$. En arrondissant au centième, on obtient 0,55, soit une probabilité d'environ 55 %.



La valeur à 8 000 heures est lue sur la fonction de répartition.

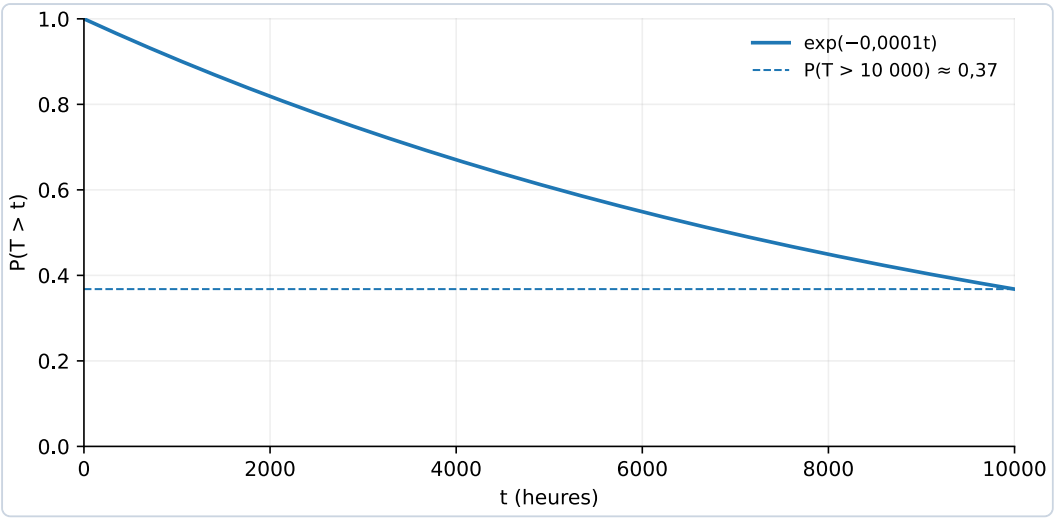
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(T < 8\,000) \approx 0,55$.

Question 3. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

Pour une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0001$, la probabilité de dépasser une durée t est la fonction de survie $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour 10 000 heures, cela donne $e^{-0,0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0,3679$. Arrondie au centième comme demandé, la probabilité est 0,37, soit environ 37 %.

Probabilité de survie du tube



La courbe représente la probabilité que le tube fonctionne encore après t heures.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence de rivets conformes observée dans l'échantillon. Il y a 975 rivets conformes sur 1 000 rivets prélevés, donc $f = 975/1000 = 0,975$. Cette fréquence observée sert d'estimation de la proportion p dans l'ensemble de la production.

Fréquence observée des rivets conformes

Rivets conformes	Taille de l'échantillon	Fréquence
975	1 000	0,975

La fréquence observée estime la proportion de rivets conformes dans la production.

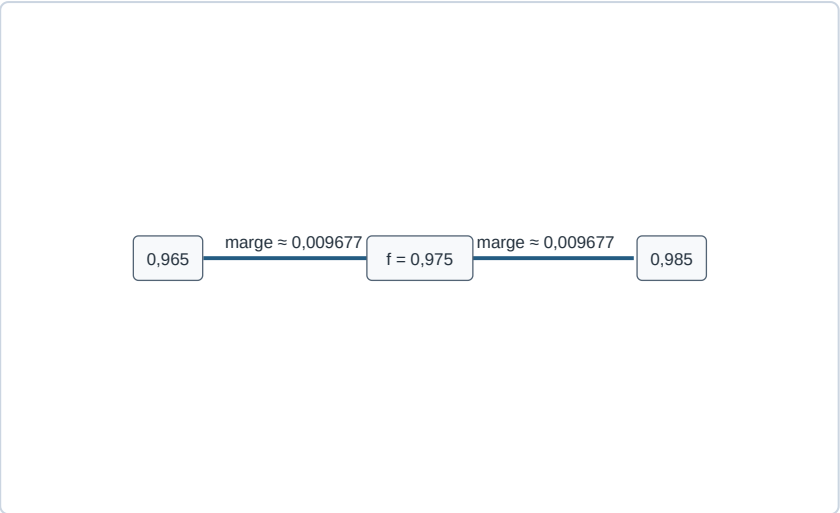
✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = f = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %, puis arrondir ses bornes au millième.

La formule du sujet utilise $f = 0,975$ et $n = 1000$. La marge est $1,96\sqrt{0,975(1-0,975)/1000} \approx 0,009677$. L'intervalle centré sur f est donc $[0,975 - 0,009677\ ;\ 0,975 + 0,009677]$, soit environ $[0,965323\ ;\ 0,984677]$. L'arrondi de chaque borne au millième donne l'intervalle demandé.

Intervalle de confiance à 95 % pour p



Intervalle centré sur la fréquence observée, bornes arrondies au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS EDITION

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux, où il est 3. Les exercices étudient le freinage d'un chariot et la production de tubes fluorescents et de rivets. Ils évaluuent équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière de $y' + ay = b$ peut être constante.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et l'asymptote horizontale est $y = 5$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance fourni est $f \pm 1,96\sqrt{f(1 - f)/n}$, avec f la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans l'arbre, distinguer probabilités conditionnelles et probabilités d'intersection, et inscrire les probabilités complémentaires.
- Pour les variations, justifier le signe de la dérivée sur l'intervalle étudié et présenter clairement les valeurs aux bornes.
- Pour une distance, calculer $F(t_1) - F(t_0)$, respecter l'unité et appliquer l'arrondi demandé au centimètre.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser $f = 975/1\,000$ et arrondir chaque borne au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

La distance est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle considéré. Utilisez la primitive F donnée et calculez $F(t_1) - F(t_0)$, puis exprimez le résultat en mètres et respectez l'arrondi au centimètre.

Q : Comment calculer les probabilités avec la loi exponentielle de cet exercice ?

Avec $\lambda = 0,001$, la probabilité que la durée soit inférieure ou égale à t vaut $1 - e^{-0,001t}$. Pour une durée supérieure à t, utilisez la probabilité complémentaire $e^{-0,001t}$.

Q : Comment organiser le temps pour traiter les deux exercices ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et les parties de chaque exercice sont indépendantes. Repérez d'abord les questions accessibles, avancez sans rester bloqué et gardez du temps pour vérifier les calculs et les arrondis.

Q : Quels arrondis et précisions de notation faut-il respecter ?

La distance doit être arrondie au centimètre, les probabilités de durée au centième et les bornes de l'intervalle de confiance au millième. Présentez les calculs utiles, indiquez les unités pertinentes et répondez au contexte.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsedition.fr/assets/annales/bts-edition/E2 - Mathématiques/2022/BTS Edition - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Edition : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.