Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS EDITION • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

BTS Edition

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsedition.fr/assets/annales/bts-edition/E2 - Mathématiques/2022/BTS Edition - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de cette fonction, la distance parcourue et son développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Pour l'équation homogène $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0{,}8$, donc $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$.
2. En la remplaçant dans l'équation, on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$. L'égalité est vérifiée pour tout t.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0{,}8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Toutes les solutions s'obtiennent en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène : $y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$.
2. Avec $f(0) = 20$, on a $5 + k = 20$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 15$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $f(t) \to 15 \times 0 + 5 = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

> La limite de $f(t)$ en $+\infty$ vaut 5. La courbe C admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour s'arrêter, le chariot devrait atteindre une vitesse nulle. Or sa vitesse décroît vers $5\ \mathrm{m\backslash cdotps^{-1}}$ et reste supérieure à 5 pour tout temps fini.

- La vitesse ne s'annule jamais.
- Le chariot ne s'arrête donc pas selon ce modèle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre zéro.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant $F(t) = -18{,}75e^{-0{,}8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0{,}8t} + 5 = 15e^{-0{,}8t} + 5$. C'est exactement l'expression de $f(t)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. À l'aide de la relation intégrale donnée, calculer la distance exacte parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

1. La distance vaut $d = F(1) - F(0)$.
2. Donc $d = (-18{,}75e^{-0{,}8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$.
3. À l'arrondi au centimètre, cela donne $15{,}33$ m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}\ \mathrm{m} \approx 15{,}33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le polynôme régulier affiché est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le reste d'un développement limité à l'ordre 2 s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est la troisième proposition.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$, donc son équation est $y = 20 - 12t$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace et réponse d’un système électrique

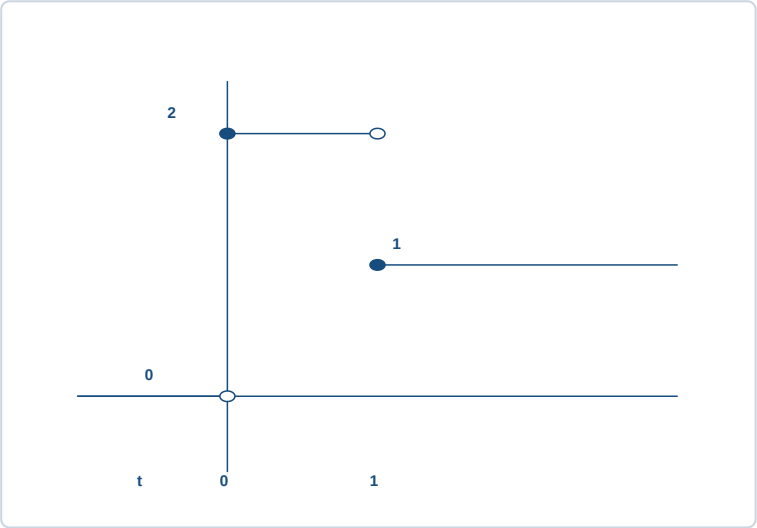
Un système électrique reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et produit un signal de sortie s(t), avec une fonction de transfert donnée. Il faut représenter les signaux, exploiter les transformées de Laplace et leurs propriétés, puis étudier l’expression et la limite de la sortie.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La définition de l’échelon donne $U(t) = 0$ pour $t < 0$ et $U(t) = 1$ dès $t = 0$. Ainsi, $e(t) = 0$ avant l’origine, $e(t) = 2$ de 0 inclus à 1 exclu, puis $e(t) = 1$ à partir de 1. Sur le graphique, les points aux sauts doivent respecter ces valeurs : le point $(0; 2)$ est plein et le point $(1; 2)$ est ouvert.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

Par linéarité, la transformée de $2U(t)$ est $2/p$. Le formulaire donne aussi $\mathcal{L}\{U(t-a)\} = e^{-ap}/p$ pour un retard de durée a. En prenant $a = 1$, la transformée de $U(t-1)$ vaut e^{-p}/p. On soustrait cette dernière expression à la première, conformément à la définition du signal d’entrée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer l'expression de S(p) donnée dans l'énoncé.

La relation entrée-sortie dans le domaine de Laplace est $S(p) = H(p)E(p)$. L'énoncé donne $H(p) = 1/(p+1)$, et la question précédente fournit $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. On multiplie ces facteurs, puis on distribue le dénominateur $p+1$ sur les deux termes du numérateur. Cette écriture est celle demandée, avec le retard porté par le facteur e^{-p} .

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, on ramène les deux fractions du membre de droite au même dénominateur, $p(p+1)$. Le numérateur devient $(p+1) - p$, soit 1. Le dénominateur et le numérateur obtenus sont donc ceux du membre de gauche. L'identité est vérifiée pour les valeurs de p où les fractions sont définies.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1).

Les deux premières transformées inverses se lisent directement dans le formulaire : $1/p$ correspond à l'échelon unité et $1/(p+1)$ à $e^{-t}U(t)$. Pour les deux expressions contenant e^{-p}, on applique la propriété de retard d'une unité : une fonction $g(t)$ devient $g(t-1)U(t-1)$. On applique cette propriété à chacune des deux fonctions précédentes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

En utilisant la décomposition de la question 2, on écrit $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. La transformée inverse du terme retardé contient le facteur $U(t-1)$, nul sur l'intervalle $[0;1[$. Il ne reste donc que l'inverse du premier terme : $2\big(U(t) - e^{-t}U(t)\big)$. Sur cet intervalle, $U(t) = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte, puis donner une valeur approchée au dixième.

On substitue $t = 1$ dans l'expression donnée pour $t \geq 1$: $s(1) = (e - 2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, on simplifie : $(e - 2)/e + 1 = 2 - 2/e$. Avec $e \approx 2{,}71828$, cette valeur vaut environ $1{,}2642$. L'arrondi au dixième est donc $1{,}3$.

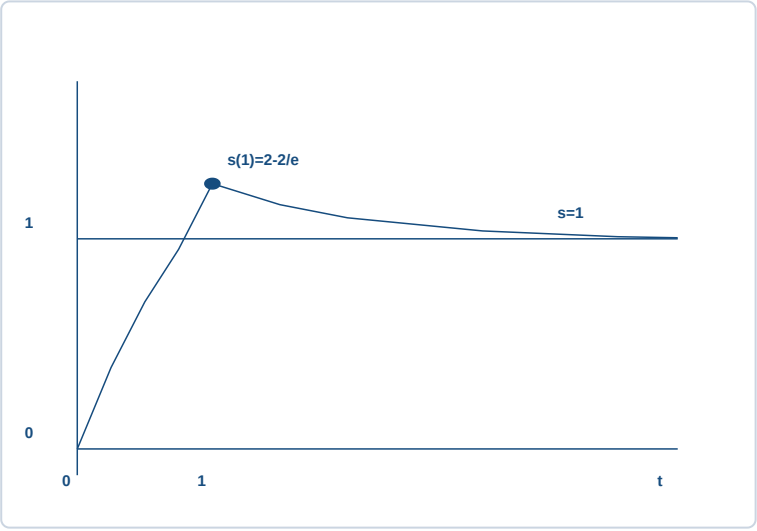
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0; 1[$, la sortie suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $2 - 2/e$. À partir de $t = 1$, elle suit $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$, décroît et tend vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$, environ $1{,}3$: le point de raccord est plein et constitue le maximum. La droite $s = 1$ est l'asymptote horizontale.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0; 0)$, atteint son maximum $(1; 2 - 2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression admise est $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme e^{-t} tend vers 0. Le produit $(e-2)e^{-t}$ tend donc également vers 0, car $e-2$ est une constante. Il reste la constante 1, qui est la limite de la sortie.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions, intégrales, développements limités et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle correspondant.
- Le retard f(t - a)U(t - a) se traduit en transformée de Laplace par $F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser f(0) = 20 pour déterminer la constante de la solution de l'équation différentielle.
- Distinguer une vitesse limite de 5 $m \cdot s^{-1}$ d'une vitesse nulle nécessaire à l'arrêt.
- Calculer une distance par $F(t_1) - F(t_0)$, en respectant les bornes et l'unité.
- Repérer le retard d'une unité dans les transformées de Laplace et traiter séparément les intervalles avant et après t = 1.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du premier exercice ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, dont les solutions sont de la forme $ke^{-0,8t}$. Ajoutez la solution particulière constante g(t) = 5, puis utilisez la condition f(0) = 20 pour déterminer k.

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la vitesse ?

Une primitive F de la vitesse f donne la distance entre t = 0 et t = 1 par F(1) - F(0). Le résultat est exprimé en mètres et doit être arrondi au centimètre, comme demandé dans le sujet.

Q : Quels tracés faut-il réaliser et rendre pour l'exercice sur le système électrique ?

Le sujet demande de tracer le signal d'entrée e(t), puis de compléter la courbe du signal de sortie s(t) sur le document-réponse à rendre avec la copie. Les autres questions demandent des calculs et des expressions rédigées.

Q : Que faut-il vérifier pour les questions de transformée de Laplace et de notation ?

Appliquez les propriétés du formulaire en identifiant les décalages temporels et les facteurs exponentiels en p. Le sujet indique 10 points pour chacun des deux exercices, sans détailler de répartition par question.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsedition.fr/assets/annales/bts-edition/E2 - Mathématiques/2022/BTS Edition - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Edition : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.